2024 ズバリ！的中

小論文

慶應義塾大学

主題であるモンティ・ホール問題（確率を求める問題）が的中

入試問題

2月14日実施　商学部　B方式
II

II．以下の文章を読んで，次の問１～問５に答えなさい。

あなたはこれから３種類のゲームに参加する。ゲームには司会者がいる。１番目のゲームは以下のように進む。「見た目が同一の三つの箱のうち，一つの箱には賞品が入っている。賞品の入った箱を選べば，あなたはその賞品を獲得できる。他の二つの箱は空である。あなたは箱を一つ選ぶよう司会者から求められるが，すぐには開けてはいけない。選び終わると，どの箱に賞品があるかを知っている司会者が，残った二つの箱の一方を開ける。司会者は必ず，空である箱を開き，選択の余地があるとき（あなたが最初に選んだ箱に賞品があるとき）には，開ける箱を無作為に（ランダムに）選ぶ。空の箱を開けた後，司会者はあなたに，まだ開けていないもう一つの箱に変えるか，元の選択にとどまるか，選ぶ機会を与える。」

賞品を手に入れる確率を高くするには，あなたは箱を変えるべきだろうか。この問題を次のように解こう。まず，ありうる結果を全て書き出す。ゲームにありうる結果は，三つの要素を持つ組として記述される。第１の要素はあなたが最初に選ぶ箱，第２の要素は司会者が開ける箱，第３の要素は賞品のある箱を表す。つまり，結果を表すこの組は，次のような形式で表される。

（あなたが最初に選ぶ箱，司会者が開ける箱，賞品のある箱）

これら三つの要素は，それぞれの箱に1, 2, 3と振られた番号で表す。例えば，(1, 2, 1) という結果は，あなたが最初に箱１を選び，司会者は箱２を開け，賞品は箱１にあるというものである。司会者は空の箱を開けるので，どの組でも（　A　）の要素は違う。また，司会者はあなたが最初に選んだ箱は開けないので，（　B　）の要素も違う。この表記方法を用いると，ありうる全ての場合を次のように並べることができる。

(1, 2, 1)　(1, 3, 1)　(1, 2, 3)　(1, 3, 2)
(2, 1, 2)　(2, 3, 2)　(2, 1, 3)　(2, 3, 1)
(3, 1, 3)　(3, 2, 3)　(3, 1, 2)　(3, 2, 1)

ただ，この12通りの組の起きやすさは全て同じではない。各組の起きやすさを検討するため，あなたは必ず最初に箱１を選ぶことにして問題を単純化する。すると，起きる可能性のある組は次の４通りになる。

(1, 2, 1)　(1, 3, 1)　(1, 2, 3)　(1, 3, 2)

賞品のある可能性は三つの箱のどれについても同じであることは，ゲームの説明の中に組み込まれている。つまり，あなたの最初の選択とは無関係に，賞品が箱１，箱２，箱３にある確率は全て等しい。また，あなたの最初の選択が当たりの状況では，司会者は残った二つの箱から開ける箱を無作為に決める。このルールはあなたも知っている。最初の選択が当たりの場合を表す組は，（　C　）の要素が同じものであり，それに該当する二つの組である（　ア　）の確率は等しい。これらのことから，(1, 2, 1) の確率は $\boxed{(24)}$ 分の $\boxed{(25)}$，(1, 3, 1) の確率は $\boxed{(26)}$ 分の $\boxed{(27)}$，(1, 2, 3) の確率は $\boxed{(28)}$ 分の $\boxed{(29)}$，(1, 3, 2) の確率は $\boxed{(30)}$ 分の $\boxed{(31)}$ となる。

箱１を選んだとして，あなたが箱を変えることで当たる確率はどれだけか。（　C　）の要素が異なる組は，箱の選択を変えることにより当たる場合を表す。これに該当する二つの組は（　イ　）である。すると，箱を変えることで賞品を得る確率は，両者の確率を足した $\boxed{(32)}$ 分の $\boxed{(33)}$ となる。この結論は，最初に箱２を選ぶとしても箱３を選ぶとしても変わらない。ゆえに，（　あ　）。

２番目のゲームは，１番目のゲームと冒頭は同じであるが，あなたが最初に箱を選んだ後に次のように進む。

河合塾

直前講習
慶大商学部小論文
第１講　I

I．次の問題文１と問題文２を読んで，設問に答えなさい。

問題文１

確率の問題は素朴な直観に反することが多い。有名な例にモンティ・ホール問題がある。モンティ・ホールはTV司会者の名前で，次のような番組の司会をしていた。

モンティ・ホールの番組では，参加者が３つの扉の１つを選ぶことを求められる。３つの扉の１つには賞品が隠されている。参加者が選んだ扉に賞品が隠されていたら，参加者は賞品を得る。

番組は次のように進行する。まず参加者が扉の１つを選ぶ。すると司会者のモンティ・ホールは選ばれなかった２つの扉のうちの１つを開く。開かれた扉には賞品はない。モンティ・ホールはそこで，残された扉に選択を変更するか，最初に選んだ扉のままでいくかを尋ねる。

参加者は最初に選んだ扉とは別の扉を選び直すべきだろうか。それとも最初に選んだ扉のままが良いだろうか。これがモンティ・ホール問題である。

残された扉は２つだけだ。だから次のように考えるのが自然であるように思われる。「３つの扉が閉ざされていた時点では $\frac{1}{3}$ の確率で賞品が得られた。１つの扉が開かれて２つが残ったので賞品を得る確率は２つに１つ，$\frac{1}{2}$ だ。つまり選択を変えても変えなくても，賞品を得る確率は同じだ」。

この考えが正しいかどうかを考える前に，モンティ・ホール問題と同型の別の問題を考えてみよう。３囚人問題と呼ばれる問題である。

囚人が３人いて，それぞれ囚人A，囚人B，囚人Cとする。３人のうち２人は死刑で１人は釈放されることが決まっているが，誰と誰が死刑で誰が釈放かは囚人には知らされていない。そこで囚人Aは看守に尋ねた。「囚人BとCのどちらが死刑になるか教えてくれ。BとCのどちらかが死刑になるのは間違いないのだから，私にどちらかを教えても問題ないはずだ」。看守はそれもそうだと考えて，「Bが死刑になる」と答えた。

そこで囚人Aは喜んだ。今までは $\frac{1}{3}$ の確率で釈放だったのが，看守の答えによりCか自分のどちらかが釈放になるとわかった。つまり釈放の確率が $\frac{1}{2}$ に上がったのだ，とAは考えたのだ。この囚人Aの考えは正しいだろうか。

３囚人問題については，$\frac{1}{2}$ になるという考えに疑問を持つ人が多いのではないだろうか。そもそも，囚人Aは看守に質問をする必要さえないのだ。BとCの少なくともどちらかは死刑になると想

「司会者は賞品の入っている箱を知らない。そして，あなたが選ばなかった二つの箱から無作為に選んで開ける。ここで司会者が賞品の入った箱を開けてしまったら，ゲームは終わり，あなたは賞品を得られない。司会者が開けた箱が空であれば，ゲームは進み，司会者はあなたに，まだ開けていないもう一つの箱に変えるか，元の選択にとどまるか，選ぶ機会を与える。」

箱を変える機会をあなたが得た場合，賞品を手に入れる確率を高くするには，箱を変えるべきだろうか。このゲームについて，あなたが最初に箱１を選ぶとすると，起こりうる結果は以下の六つになる。

(1, 2, 1)　(1, 3, 1)　(1, 2, 2)　(1, 3, 2)　(1, 2, 3)　(1, 3, 3)

賞品が箱１，箱２，箱３にある確率は全て等しい。そして，賞品がどの箱にあるかにかかわらず，司会者が箱２と箱３を開ける確率は等しい。このことから，例えば (1, 2, 2) の確率は $\boxed{(34)}$ 分の $\boxed{(35)}$ と計算できる。すると，司会者が賞品のある箱を開けてしまい，ゲームが終了する確率は $\boxed{(36)}$ 分の $\boxed{(37)}$，司会者が賞品のない箱を開け，あなたが箱を変えて賞品を逃す確率は $\boxed{(38)}$ 分の $\boxed{(39)}$，司会者が賞品のない箱を開け，あなたが箱を変えて賞品を得る確率は $\boxed{(40)}$ 分の $\boxed{(41)}$ となる。この結論は，最初に箱２を選んでも箱３を選んでも変わらない。ゆえに，司会者が賞品のない箱を開けてゲームが進めば，（　い　）。

３番目のゲームは，以下のように進む。「あなたは同一の箱を七つ見せられる。七つの箱には賞金が入っており，７万円が入っているのは三つ，４万円が入っているのは二つ，３万円が入っているのは二つである。あなたは選んだ箱に入っている賞金を獲得できる。あなたは箱を一つ選ぶよう司会者から求められるが，すぐには開けてはいけない。選び終わると，司会者はあなたが選んだ箱以外の六つの箱から無作為に一つを選んで開ける。そのうえで，箱を変えるか，元の選択にとどまるか，選ぶ機会を与える。」

期待できる賞金を高くするには，あなたは箱を変えるべきだろうか。ここで，「期待できる賞金」は，あなたが箱を変える，あるいは変えないという選択をしたときに，起こりうる全ての結果のそれぞれについて，その確率と得られる賞金を掛け，それらを足し合わせたものである。例えば，「変えない」という選択をしたとしよう。最初に箱を選ぶときには，７万円が得られる確率は $\frac{3}{7}$，４万円が得られる確率は $\frac{2}{7}$，３万円が得られる確率は $\frac{2}{7}$ である。この確率は，司会者が箱を開けても変わらない。すると，最初の選択を変えないことで期待できる賞金は，$\frac{3}{7}\times 7+\frac{2}{7}\times 4+\frac{2}{7}\times 3=5$ より５万円となる。

「変える」という選択をしたときに期待できる賞金の計算では，手順が増える。そして，期待できる賞金は，司会者が開けた箱に入っていた賞金によって変わる。例えば，司会者が開けた箱に７万円が入っていたとする。あなたが最初に選んだ箱に７万円が入っていれば，新たに選ぶ箱は，７万円入りの箱が一つ，４万円入りの箱が二つ，３万円入りの箱が二つの計５箱からの１箱である。このとき，箱を変えることで期待できる賞金は，$\frac{1}{5}\times 7+\frac{2}{5}\times 4+\frac{2}{5}\times 3=4.2$ より４万２千円となる。あなたが最初に選んだ箱に４万円が入っていれば，箱を変えることで期待できる賞金は，同様の計算から $\frac{2}{5}\times 7+\frac{1}{5}\times 4+\frac{2}{5}\times 3=4.8$ より４万８千円となる。あなたが最初に選んだ箱に３万円が入っていれば，箱を変えることで期待できる賞金は同様の計算により５万円となる。最初に選んだ箱に７万円が入っている確率は $\frac{3}{7}$，４万円が入っている確率は $\frac{2}{7}$，３万円が入っている確率は $\frac{2}{7}$ なので，選択を変えたときに期待できる賞金は，$\frac{3}{7}\times 4.2+\frac{2}{7}\times 4.8+\frac{2}{7}\times 5=4.6$ より４万６千円となる。箱を「変えない」という選択と比較すると，司会者が開けた箱に７万円が入っていれば，（　う　）。

では，司会者が開けた箱に入っていたのが４万円だったらどうであろうか。選択を変えたときに期待できる賞金を同様の計算をして求めよう。箱を変えることで期待できる賞金は，あなたが最初に選んだ箱に７万円が入っていれば $\boxed{(42)}$ 万 $\boxed{(43)}$ 千円，４万円が入っていれば $\boxed{(44)}$ 万 $\boxed{(45)}$ 千円，３万円が入っていれば $\boxed{(46)}$ 万 $\boxed{(47)}$ 千円となる。この三つの可能性を確率をつけて考え合わせると，期待できる賞金は $\boxed{(48)}$ 万 $\boxed{(49)}$ 千円となり，（　え　）。

（J. ローゼンハウス著，松浦俊輔訳『モンティ・ホール問題』青土社，2013年，を改変して作成した。）

問１．本文中の空欄 $\boxed{(24)}$ ～ $\boxed{(49)}$ には，０から９の整数が入る。その整数を解答用紙Ａ（マークシート）の解答欄にマークしなさい。ただし，確率を表す分数は既約分数にすること。

問２．本文中の空欄（　Ａ　）～（　Ｃ　）に当てはまる最も適切な語句を次の選択肢から選び，その番号を解答用紙Ａ（マークシート）の解答欄にマークしなさい。ただし，（　Ａ　）$\boxed{(50)}$，（　Ｂ　）$\boxed{(51)}$，（　Ｃ　）$\boxed{(52)}$ である。

１　第１と第２　　２　第１と第３　　３　第２と第３

問３．本文中の空欄（　ア　），（　イ　）に当てはまる最も適切な組を次の選択肢から選び，その番号を解答用紙Ａ（マークシート）の解答欄にマークしなさい。ただし，（　ア　）$\boxed{(53)}$，（　イ　）$\boxed{(54)}$ である。

１　(1, 2, 1) と (1, 3, 1)　　２　(1, 2, 1) と (1, 2, 3)　　３　(1, 2, 1) と (1, 3, 2)
４　(1, 3, 1) と (1, 2, 3)　　５　(1, 3, 1) と (1, 3, 2)　　６　(1, 2, 3) と (1, 3, 2)

問４．本文中の空欄（　あ　）～（　え　）に当てはまる最も適切な語句を次の選択肢から選び，その番号を解答用紙Ａ（マークシート）の解答欄にマークしなさい。ただし，（　あ　）$\boxed{(55)}$，（　い　）$\boxed{(56)}$，（　う　）$\boxed{(57)}$，（　え　）$\boxed{(58)}$ である。

１　箱を変えた方が良い　　２　箱を変えない方が良い　　３　箱を変えても変えなくても同じである

問５．１番目のゲームと２番目のゲームでは，賞品獲得を目指す際にとるべき行動に違いが生じる。その理由を説明するとき，次の空欄に入る最も適切な語句を，解答用紙Ｂの所定の欄に20字以内で記入しなさい。

２番目のゲームでは，司会者がどの箱に賞品があるのかを知らないので，司会者が（　　　　）から。

像するだけで，同じ理屈が成り立つことになる。つまり看守の答えを聞いても（　　あ　　）のに，釈放の確率は上がることになる。これは明らかにおかしい。

では，モンティ・ホール問題をどう考えたら良いだろうか。

まず，３つの扉をそれぞれ扉１，扉２，扉３としよう。また，「x の確率」を $P(x)$ と表すことにする。たとえば「扉１に賞品がある確率」は P(扉１に賞品がある）と表す。

参加者が最初に選んだのが扉１という状況を考えよう。ほかの扉を選んだとしても話は全く同じである。

参加者が扉１を選ぶ。この段階では，P(扉１に賞品がある）が P(扉２に賞品がある）や P(扉３に賞品がある）と異なると考える理由はない。つまり P(扉１に賞品がある)＝P(扉２に賞品がある)＝P(扉３に賞品がある)＝(　①　）である。

モンティが扉を開くことで可能性が分岐する。参加者が扉１を選び，賞品も扉１にあるとしよう。この場合，「扉１に賞品がありモンティが扉２を開ける」可能性と「扉１に賞品がありモンティが扉３を開ける」可能性の両方がある。どちらの扉を選んでも同じなので，モンティが扉２または扉３を開く確率は（　②　）ということになる。

参加者が扉１を選び，賞品は扉１にはないとしたらどうか。この場合は賞品が扉２と３のどちらにあるかによってモンティの選択が変わる。賞品が扉２にあるならモンティは確率（　③　）で扉２を開き，確率（　④　）で扉３を開く。賞品が扉３にあるならモンティは確率（　⑤　）で扉２を開き，確率（　⑥　）で扉３を開く。

以上をふまえた上で，参加者が扉１を選んだことに対してモンティが扉２を開けたとしよう。参加者が扉１を選んだ段階では可能性は４つあった。モンティが扉２を開けると，「(　　い　　)」可能性と「扉２に賞品がありモンティが扉３を開く」可能性が消え，「扉１に賞品がありモンティが扉２を開く」可能性と「扉３に賞品がありモンティが扉２を開く」可能性の２つが残る。それぞれの可能性の確率を考えると，参加者が扉１を選んだ場合「扉１に賞品がありモンティが扉２を開く」というのは，「扉１に賞品がある」２通りのケースの片方が起こったということだから，その確率は（　⑦　）である。参加者が扉１を選んだ場合「扉３に賞品がありモンティが扉２を開く」可能性は１通りでその確率は（　⑧　）である。

以上をふまえて「参加者が扉１を選び，モンティが扉２を開いた」場合に「扉１に賞品がある」確率を求めるには，「扉１に賞品がありモンティが扉２を開く」と「扉３に賞品がありモンティが扉２を開く」のどちらかが起こった場合の「扉１に賞品がありモンティが扉２を開く」確率を算出すれば良い。これは以下の式で求められる。

P(扉１に賞品がありモンティが扉２を開く)÷{P(扉１に賞品がありモンティが扉２を開く)＋P(扉３に賞品がありモンティが扉２を開く)}＝(　⑨　)

（　⑨　）は最初の選択を（　　う　　）場合に賞品を得られる確率である。それに対して，最初の選択を変える場合に賞品を得られる確率，ここで説明した例で言えば，最初に扉１を選び，モンティが扉２を開いた場合に，扉３に選択を変えた場合に賞品を得られる確率は，上記の式と同じ考え方で求められ，（　⑩　）になる。

つまり，選んだ扉を変えないのが良いか，変えるのが良いかという問いの答えは（　　え　　）ということになる。

ただし，この（　　え　　）という答えは結局のところ，モンティが（　　お　　）に依存している。（　　お　　）の条件が変われば答えも変わる可能性があるのである。

問１．本文中の空欄（　　あ　　）～（　　お　　）に入る適当な語句を解答用紙の所定の欄に記述しなさい。ただし，（　　あ　　）は「情報」の語を必ず使い15字以内で，（　　い　　）は20字以内，（　　う　　）は５字以内，（　　え　　），（　　お　　）は８字以内とする。

問２．本文中の空欄（　①　）～（　⑩　）に入る適当な数値を解答用紙の解答欄①～⑩に記入しなさい。なお確率は分数か整数で表すとする。